

ЛЕКЦИЯ 4.

Релятивистская кинематика

А.И. Валишев, В.Г. Сербо.

6.2 Релятивистские преобразования скорости.

6.2.1. Разложения радиус вектора на продольную и поперечную составляющие. Компонента $r_{\parallel}$ продольна V , $r_{\perp}$ поперечна V .

$$(V \cdot r) = |V| \cdot |r_{\parallel}| = V \cdot |r_{\parallel}|.$$

$$r = r_{\parallel} + r_{\perp}; \quad \vec{r}_{\parallel} = \vec{V} \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r})}{V^2}.$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \vec{r} - \vec{V} \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r})}{V^2} = \vec{r} - \left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{V})}{V} \right) \cdot \frac{\vec{V}}{V}; \quad (r_{\perp}, r_{\parallel}) = 0.$$

Согласно формулам преобразований Лоренца. Продольные компоненты преобразуются, поперечные не преобразуются:

$$r_{\parallel} = \gamma(r'_{\parallel} + Vt'), \quad r_{\perp} = r'_{\perp}, \quad t = \gamma(t' + (V \cdot r')/c^2);$$

Продольные компоненты радиус – вектора при направлении скорости $V \parallel x, x' \leftrightarrow r_{\parallel} = (x, 0, 0); r_{\perp} = (0, y, z)$.

Аналогично $r'_{\perp}$.

6.2.2 Дифференцируя соотношения Лоренц преобразований продольных относительно скорости компонент и поперечных находим:

$$dx = \gamma(dx' + V \cdot dt'); \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \gamma(dt' + (V \cdot dx')/c^2).$$

6.2 Релятивистские преобразования скорости.

6.2.2 Дифференцирование выполняется при $V = \text{const}$.

Получено:

$$dr_{\parallel} = dx = \gamma(dx' + V \cdot dt') ;$$
$$dr_{\perp} = dy = dy' ; \quad dz = dz' ; \quad dt = \gamma(dt' + (V \cdot dx')/c^2) .$$

6.2.3 Отсюда преобразования компонент скорости (например v_x) после подстановки дифференциалов координат и времени в числитель и знаменатель:

$$v_x = dx/dt = \gamma(dx' + V \cdot dt') / \gamma(dt' + (V \cdot dx')/c^2) =$$
$$= (v'_x + V) / (1 + v'_x V/c^2) ;$$

Аналогично: v_y, v_z :

$$v_y = dy/dt = dy' / \gamma(dt' + (V \cdot dx')/c^2) =$$
$$= (v'_y / \gamma) / (1 + v'_x V/c^2) ;$$

$$v_z = dz/dt = dz' / \gamma(dt' + (V \cdot dx')/c^2) =$$
$$= (v'_z / \gamma) / (1 + v'_x V/c^2) .$$

6.2.4. Обратные преобразования скоростей получаются заменой индексов не штрихованных на штрихованные ($i \rightarrow i'$), а также знака скорости: V на $(-V)$:

$$v'_x = (v_x - V) / (1 - v_x V/c^2) ;$$

$$v'_y = (v_y / \gamma) / (1 - v'_x V/c^2) ;$$

$$v'_z = (v_z / \gamma) / (1 - v'_x V/c^2) ;$$

Сводка релятивистских преобразований компонент скоростей
 $S' \rightarrow S$:

$$v_x = (v'_x + V) / (1 + v'_x V/c^2) ;$$

$$v_y = (v'_y / \gamma) / (1 + v'_x V/c^2) ;$$

$$v_z = (v'_z / \gamma) / (1 + v'_x V/c^2) .$$

7. Интервал.

Рассматриваются 2 события в системе S .

Событие 1 – четыре вектор с компонентами – $(ct_1, \mathbf{r}_1)$,
событие 2 – четыре вектор с компонентами – $(ct_2, \mathbf{r}_2)$.

Df. Интервал (между событиями), просто интервалом s_{12} называется квадратичная форма:

$$s_{12} = (c^2 (t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2)^{1/2} ;$$

Утверждение. Квадрат интервала инвариантен относительно преобразований Лоренца инвариантен:

$$(s_{12})^2 = (s'_{12})^2 = inv !$$

Существует три класса интервалов:

- a) - $(s_{12})^2 > 0$;
- b) - $(s_{12})^2 < 0$.
- $(s_{12})^2 = 0$.

7. Интервал.

7.1. а) Интервал называется *времениподобным* если:

$$(s_{12})^2 > 0 ;$$

В этом случае существует такая инерциальная система S' где события
одноместны $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2$,

Для а) не существует! системы отсчета где события одновременны $t'_1 = t'_2$.
При допущении $t'_1 = t'_2$ имеем противоречие. В этом случае $(s'_{12})^2 < 0$; и в
силу инвариантности также:

$$(s'_{12})^2 = (s_{12})^2 < 0$$

в любой другой системе отсчета S .

Для а) одно событие является абсолютно будущим по отношению к другому.
Т. образом события *причинно связаны!* – одно может быть следствием другого,
поскольку сигнал от одного к другому распространяется со скоростью меньшей
скорости света c .

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| < c(t_1 - t_2)$$

Согласно преобразованиям Лоренца существует система S' где :

$$c(t'_1 - t'_2) = \gamma(V)[c(t_1 - t_2) - (x_1 - x_2)]$$

7.2. b) Интервал **пространственноподобный** если $(s_{12})^2 < 0$;

Существует (найдется) такая инерциальная система S' где события одновременны $t'_1 = t'_2$,

Не существует! системы отсчета где события одноместны: ~~$r'_1 = r'_2$~~ . События абсолютно удалены, поскольку всегда, в любой системе отсчета

$$(s_{12})^2 = (s'_{12})^2 < 0 ;$$

События **причинно не! связаны**, поскольку $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| > c(t_1 - t_2)$, тогда скорость распространения сигнала $\Delta|\mathbf{r}|/\Delta t > c$, что запрещено.

7.3. Интервал **светоподобный** если $(s_{12})^2 = 0 \rightarrow c(t_1 - t_2) = (x_1 - x_2)$

7.4. Интервал для бесконечно близких событий.

Если два события очень близки: событие 1) - $t, \mathbf{r}$;

событие 2) - $t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r}$

в этом случае квадрат дифференциала интервала:

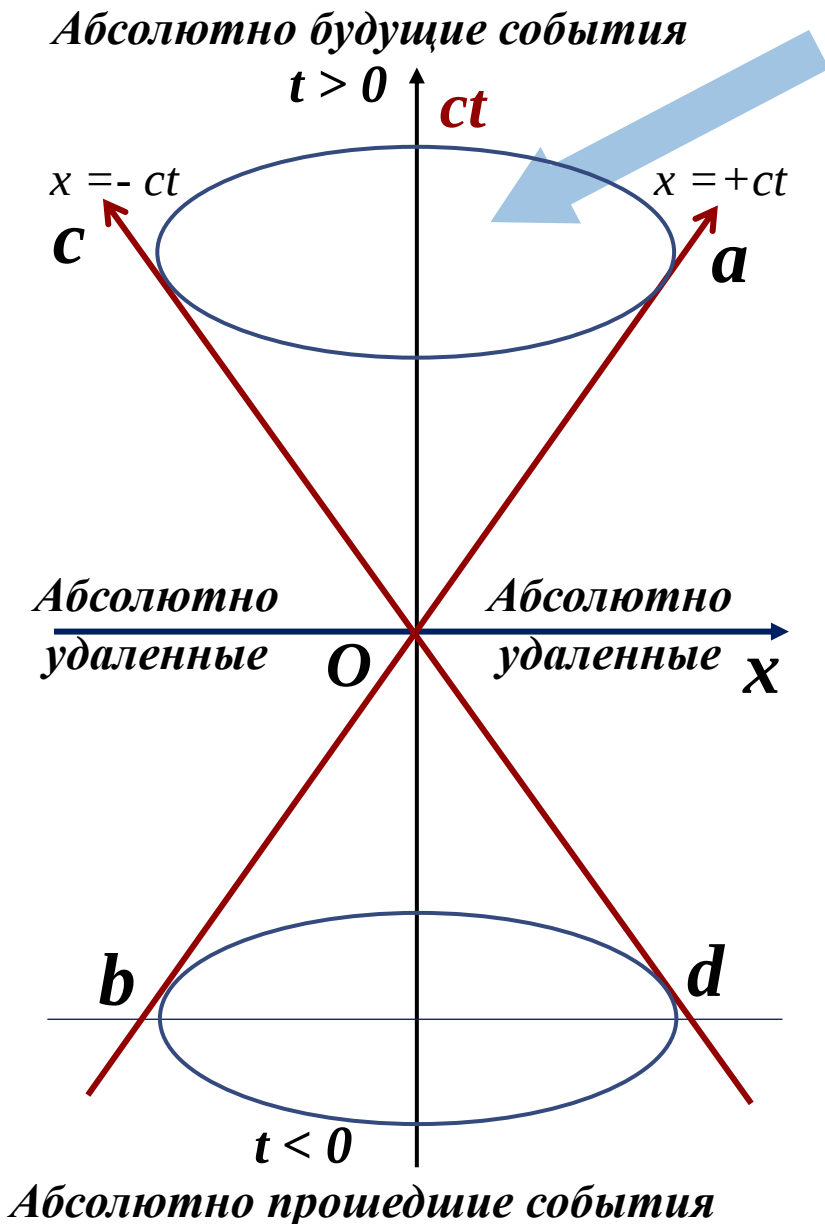
$$ds^2 = c^2 dt^2 - (d\mathbf{r})^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

7.5 Мировая линия прошлое, будущее, причинность.

Световой конус.

Df. Мировая линия - зависимость пространственной координаты точки от времени.

7.5. Световой конус.



Световой конус ограничен образующими $ab, cd \Leftrightarrow x = \pm ct$.
В областях aOc **и** bOd
 $(ct)^2 - x^2 > 0$.

Интервалы между событиями из aOc **и** O **времениподобны**. т.к. $s^2 > 0$. **В любой системе отсчета событие в области** aOc **происходит** *позднее, чем* O .
Событие O **является более** *поздним*, **чем** **любое событие из области** bOd .

Интервалы между событиями вне светового конуса и событие O **пространственноподобны**. т.к.

$$(ct)^2 < x^2, \quad s^2 < 0.$$

Ни в одной системе отсчета информация о таком событии не может повлиять на событие O – они *причинно НЕ связаны*.

Примеры.

Пример 1.

Имеются два события в системе отсчета S .

Событие 1 произошло в момент времени $t = 0$ в точке $x = 0$. 4-вектор (1) $(0, 0, 0, 0)$;

Событие 2 произошло в момент времени $t = \tau$ в точке $x = l$. 4-вектор (2) $(c\tau, l, 0, 0)$;

Существует ли система отсчета S' в которой события одновременны?

Определить скорость такой системы отсчета S' ?

По условию одновременность в S' означает: $t'_1 = t'_2$.

Выполним переход в систему S' согласно преобразованиям Лоренца. Необходимо преобразовать время:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right); \rightarrow t'_1 = 0 ,$$

$$t'_2 = \gamma \left(\tau - \frac{Vl}{c^2} \right) \neq 0 ;$$

Условие одновременности: $t'_1 = t'_2 = 0$, $\rightarrow$

$$\tau - \frac{Vl}{c^2} = 0 , \quad \frac{V}{c} = \beta = \frac{c\tau}{l} ;$$

Необходимое условие одновременности: $c\tau \leq l$. Интервал в этом случае пространственно подобный поскольку квадрат интервала

$$s_{12}^2 < 0 .$$

Примеры.

Пример 2.

Покажем инвариантность квадрата интервала относительно преобразований Лоренца.

$$(s_{12})^2 = (s'_{12})^2 = inv !$$

Возьмем в качестве примера данные рассмотренной задачи.

Требуется вычислить времена и координаты событий (1') и (2') в системе S'.

В системе S

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = c^2\tau^2 - l^2 \leq 0 ;$$

В системе S' :

$$t'_1 - t'_2 = -\gamma \left(\tau - \frac{Vl}{c^2} \right),$$

$$x'_1 = \gamma(x - V \cdot t) = \gamma(0 - V \cdot 0) = 0 ,$$

$$x'_2 = \gamma(l - V \cdot \tau) ,$$

$$s_{12}^{2'} = c^2(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 = c^2\gamma^2 \left(\tau - \frac{Vl}{c^2} \right)^2 - \gamma^2(l - V\tau)^2 =$$

$$= \gamma^2 \left[c^2\tau^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) - l^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right] = c^2\tau^2 - l^2 \quad !! (QED) ;$$

Доказано:

$$s_{12}^2 = s_{12}^{2'} .$$

7.6. Собственное время.

Времениподобный интервал ($ds^2 > 0$) между двумя близкими событиями, как и любой интервал, инвариантен относительно преобразований Лоренца:

$$ds^2 = (c \cdot dt)^2 - (dr)^2 = inv, \quad ds = [(c \cdot dt)^2 - (dr)^2]^{1/2}.$$

Df. Собственным временем τ называется отношение интервала к c :

$$d\tau = ds/c = [(c \cdot dt)^2 - (dr)^2]^{1/2}/c = [1 - (V/c)^2]^{1/2} \cdot dt.$$

Собственное время совпадает со временем в системе отсчета, в которой частица покоится : если $V = 0$ то $d\tau = dt$.

Всюду далее время t в релятивистских соотношениях заменяется на переменную x_0 размерности длины: $x_0 = ct$.

x_0 является нулевой компонентой 4-е вектора !

Преобразования Лоренца после введения $x_0 = ct$ приобретают более симметричный вид. Например, преобразования Лоренца $S' \rightarrow S$:

$$\begin{aligned} x_0 &= \gamma(x'_0 + (V/c)x'), \\ x &= \gamma(x' + (V/c)x'_0), \\ y &= y', \quad z = z'. \end{aligned}$$

7.7. 4 - векторы.

Df. 4 – е вектор аналог радиус - вектора – вектор состоящий из 4-х компонент:

временная компонента + 3 пространственных, имеет обозначение:

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z) = (x_0, \mathbf{r}) .$$

Df. Вводится **квадрат !** 4 – е радиус-вектора по правилу:
квадрат нулевой компоненты **минус!** квадрат пространственной компоненты:

$$(x_{\mu})^2 = (x_0)^2 - (\mathbf{r})^2 = (x_0)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) .$$

Можно показать - квадрат 4 -е – вектора является инвариантом преобразований Лоренца. (см. пример 2)

Квадрат 4 – вектора x_{μ} квадрат «временной» координаты минус квадрат координаты есть квадрат интервала.

7.7. 4 - векторы.

Можно составить другие виды 4 – векторов.

Любой 4 - вектор A_μ имеет вид:

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A_0, \mathbf{A}).$$

Необходимые свойства 4 – вектора A_μ :

компоненты A_μ преобразуются по правилам Лоренц – преобразования:

$$\begin{aligned} A_0 &= (A'_0 + (V/c)A'_x), \\ A_x &= \gamma (A'_x + (V/c)A'_0), \\ A_y &= A'_y, \\ A_z &= A'_z. \end{aligned}$$

0 - я компонента A_0 преобразуется по правилу преобразования времени

Пространственные компоненты ($i=1,2,3$) преобразуются по правилам преобразования координат x, y, z

Квадрат 4 – вектора A составляется по правилу квадрат нулевой компоненты минус квадрат пространственной:

$$(A_\mu)^2 = (A_0)^2 - (\mathbf{A})^2.$$

7.7.1. 4 – вектор скорости = 4 - е скорость.

Df. Четыре скорость = определяется как производная 4 – вектора x_μ по собственному времени τ :

$$u_\mu = dx_\mu / d\tau; \quad u_\mu = (u_0, \mathbf{u}) ;$$

$$\begin{aligned} u_\mu &= (dx_0, d\mathbf{r}) / [(1 - (V/c)^2)^{1/2} dt = \\ &= (c / [(1 - (V/c)^2)^{1/2}, \mathbf{V} / [(1 - (V/c)^2)^{1/2}]) ; \end{aligned}$$

Покомпонентно:

Нулевая компонента: $u_0 = c / [(1 - (V/c)^2)^{1/2}] = \gamma c,$

Пространственные компоненты: $\mathbf{u} = \mathbf{V} / [(1 - (V/c)^2)^{1/2}] = \gamma \mathbf{V} .$

Квадрат 4 – вектора скорости инвариантен относительно преобразований Лоренца:

$$(u_\mu)^2 = (u_0)^2 - (\mathbf{u})^2 = c^2 = inv.$$

7.7. 4 – векторы.

Df. Правила вычисления скалярного произведения 4 – векторов 2-х произвольных 4 – векторов A_μ и B_μ :

$$A_\mu B_\mu = A_0 B_0 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) .$$

Скалярное произведение 4 – векторов A_μ и B_μ является инвариантом преобразования Лоренца.

7.7.2. Примеры.

В СТО применимы 4 – вектор координат (события) x_μ ;

4 – вектор скорости u_μ ;

4 – вектор энергии – импульса P_μ .

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

<http://phys.nsu.ru/fit>

<http://el.nsu.ru>